

Abundancy indexが6を超える最小の奇数の決定

Determining the Smallest Odd Integer with Abundancy Index Greater than 6

永通 悠伍/矢寺 佑輔/中本 陽仁/春木 詩温/山下 航平/藤原 功紀/十河 亮太/上西 悠太

泉北高等学校 56期 数学1班

Abstract

We investigate the structure of oddly superabundant numbers and develop a method for generating oddly superabundant numbers in increasing order. Using our method, we determine the smallest odd integer with abundancy index greater than 6. We remark that one of the authors, Y. Nagamichi, discovered the smallest 7-, 8- and 9-abundant numbers by slightly modifying our method.

1. 序文

私たちは、奇数過剰数に興味を持ち、最小の奇数 k 倍過剰数を自分達の力で求めることを目標に研究を行い、世界に先駆けて最小の奇数6倍過剰数を発見した。まず簡単に用語の説明をする。正確な定義は次章で与える。過剰数とは、約数の総和がもとの数の2倍を超える自然数のことを言う。ちなみに約数の総和が元の数の丁度2倍となる自然数が完全数である。約数の総和が元の数の k 倍を超える自然数を k 倍過剰数といい、奇数の k 倍過剰数を奇数 k 倍過剰数という。各実数 k に対して最小の奇数 k 倍過剰数を考え、これらを総称して奇数超過剰数と呼ぶ。

最小の奇数3倍過剰数は R. Laatsch により (1986 [2] TableB)、最小の奇数4倍過剰数と奇数5倍過剰数は S. Pettigrew により (2000 [3] §2.3) 既に知られている (cf. OEIS A119240 [6])。一方で、6以上の自然数 k に対して最小の奇数 k 倍過剰数は知られていない。私たちは、最小の奇数6倍過剰数を見つけることを目標に研究を進めた。

当初の方法は、奇数超過剰数が小さい素数の積で表されること (定理1 (Alaoglu-Erdős [1] Theorem 1)、定理2) をもとに、「相異なる素因数の個数」「重複した素因数の個数」に着目したもので、私たちはその方法で最小の奇数3倍超剰数 ($1018976683725=3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$) を求めることができた。しかし、最小の奇数4倍過剰数や奇数5倍過剰数は、かなり桁数が大きくなることから、素朴なこの方法では候補となる奇数があまりに多く、見つけるに至らなかった。そこで、奇数超過剰数を求め、その中から最小の奇数 k 倍過剰数を探すことにした。既知のデータなどを調べたところ、奇数超過剰数は小さい順に1000番目までの表は公開されていた (cf. [4]) が、それ以上のデータは見つからなかった。公開されている表の最後の数 (1000番目の奇数超過剰数) は241桁の自然数で、約数の和がその数の約5.6倍であった。目標の最小の奇数6倍過剰数を見つけるためには、奇数超過剰数をもっとたくさん計算する必要がある。

私たちは、奇数超過剰数を小さい順に計算する効率の良い方法を開発した。その方法を使って、これまで公開されている表を大きく上回る4500番目までの奇数超過剰数を求めた。そして、世界に先駆けて最小の奇数6倍過剰数の発見に成功した。この論文では、第2章で、奇数超過剰数計算に必要な過剰指数、 α 階過剰指数を定義する。第3章で、 α 階 F -数を定義し、奇数超過剰数に関する主定理を与える。第4章で奇数超過剰数の計算方法を与える。最小の奇数6倍過剰数は第5章に、永通悠伍による最小の

奇数7倍、8倍、9倍過剰数は第6章に記す。なお、本論文で導入する「*F*-数」という名称は、著者らの在籍校である泉北高等学校の頭文字「泉」の英訳であるfountainに由来して命名した。

2. 過剰指数、*a*階過剰指数

n のすべての正の約数の和を $\sigma(n)$ で表す。 σ は約数和関数と呼ばれる。比 $\rho(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ を n の過剰指数という。 $\rho(n) = 2$ となる自然数 n が完全数である。 $\rho(n) > 2$ を満たす n を過剰数という。 $\rho(n) > k$ を満たす n を k 倍過剰数という。

n を自然数とする。 n より小さいすべての自然数 m に対して $\rho(n) > \rho(m)$ が成り立つとき、 n を超過剰数という。同様に、正の奇数 n について、 n より小さいすべての正の奇数 m に対して $\rho(n) > \rho(m)$ が成り立つとき、 n を奇数超過剰数という。

約数和関数 σ は数論的関数(x, y が互いに素ならば、 $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ が成り立つ)である (cf. Laatsch 1986 [2], Theorem 3) ので、互いに素な自然数 x, y に対して、以下が成り立つ。

$$\rho(xy) = \frac{\sigma(xy)}{xy} = \frac{\sigma(x)\sigma(y)}{xy} = \frac{\sigma(x)}{x} \frac{\sigma(y)}{y} = \rho(x)\rho(y)$$

よって、過剰指数も同様に数論的関数である。

自然数 n, m について、 mn と n の過剰指数の比を相対過剰指数と呼び、 $\varepsilon_n^m = \frac{\rho(mn)}{\rho(n)}$ で表す。

この指標の導入により、過剰指数の増加率の表現を簡略化できる。例えば、3から9までの過剰指数の増加率は ε_3^9 と表される。つまり、 $\rho(9) = \rho(3) \times \varepsilon_3^9$ である。315の過剰指数は、次のようになる。

$$\rho(315) = \rho(3^2 \times 5 \times 7) = \varepsilon_1^3 \times \varepsilon_3^5 \times \varepsilon_1^7$$

この様に、過剰指数は素数ごとの相対過剰指数の積で計算できる。

命題1

奇素数 p と負でない整数 a, b に対し、相対過剰指数は次のように表される。

$$\varepsilon_{p^a}^{p^b} = \frac{p^{a+b+1}-1}{p^b(p^{a+1}-1)}$$

証明

相対過剰指数の定義に従って式を展開すると、以下のようになる。

$$\varepsilon_{p^a}^{p^b} = \frac{\rho(p^{a+b})}{\rho(p^a)} = \frac{\frac{\sigma(p^{a+b})}{p^{a+b}}}{\frac{\sigma(p^a)}{p^a}} = \frac{1}{p^b} \times \frac{\sigma(p^{a+b})}{\sigma(p^a)}$$

$\sigma(p^n) = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$ より、これは初項1、公比 p の等比級数であるから、 $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ である。よって、

$$\frac{1}{p^b} \times \frac{\sigma(p^{a+b})}{\sigma(p^a)} = \frac{1}{p^b} \times \frac{\frac{p^{a+b+1}-1}{p-1}}{\frac{p^{a+1}-1}{p-1}} = \frac{p^{a+b+1}-1}{p^b(p^{a+1}-1)}$$

したがって、 $\varepsilon_{p^a}^{p^b} = \frac{p^{a+b+1}-1}{p^b(p^{a+1}-1)}$ が成り立つ。

命題1より、

$$\begin{aligned} \rho(3^2 \times 5 \times 7) &= \varepsilon_1^3 \times \varepsilon_3^3 \times \varepsilon_1^5 \times \varepsilon_1^7 \\ &= \frac{3^{0+1+1}-1}{3^1(3^{0+1}-1)} \times \frac{3^{1+1+1}-1}{3^1(3^{1+1}-1)} \times \frac{5^{0+1+1}-1}{5^1(5^{0+1}-1)} \times \frac{7^{0+1+1}-1}{7^1(7^{0+1}-1)} \\ &= \frac{8}{6} \times \frac{26}{24} \times \frac{24}{20} \times \frac{48}{42} = \frac{208}{105} \end{aligned}$$

このように315の過剰指数を求めることができる。

相対過剰指数に関する命題を示す。ここで、自然数 m が自然数 n の約数であることを $m \mid n$ で表し、素数 p と自然数 a について、 $p^a \mid n$ であるが $p^{a+1} \nmid n$ でないことを $p^a \parallel n$ で表すことにする。

命題2(相対過剰指数の数論的乗法性)

(1) 自然数 n に対して $\varepsilon_n^1 = 1$ が成り立つ。

(2) m, n を自然数とし、 p を素数とする。 $n = p^a \times n_0, m = p^b \times m_0$ (n_0, m_0 は p と素な自然数) とする。このとき、 $\varepsilon_n^m = \varepsilon_{p^a}^{p^b} \times \varepsilon_{n_0}^{m_0}$ が成り立つ。したがって、相対過剰指数は素数のべき乗に関する相対過剰指数の積で表せる。

証明

(1) 定義より、 $\varepsilon_n^1 = \frac{\rho(1 \times n)}{\rho(n)} = 1$ だから明らかである。

(2) m, n を自然数とし、 p を素数とする。 $n = p^a \times n_0, m = p^b \times m_0$ (n_0, m_0 は p と素な自然数) とする。 ρ の数論的乗法性より、以下が成り立つ。

$$\varepsilon_n^m = \frac{\rho(mn)}{\rho(n)} = \frac{\rho(p^{a+b} \times n_0 \times m_0)}{\rho(p^a \times n_0)} = \frac{\rho(p^{a+b})}{\rho(p^a)} \times \frac{\rho(m_0 \times n_0)}{\rho(n_0)} = \varepsilon_{p^a}^{p^b} \times \varepsilon_{n_0}^{m_0}$$

よって、 $\varepsilon_n^m = \varepsilon_{p^a}^{p^b} \times \varepsilon_{n_0}^{m_0}$

定義 (a階過剰指数)

a を負でない整数とする。素数 p 、負でない整数 b に対し、 $\rho_{(a)}(p^b) = \varepsilon_p^{p^b}$ とおき、自然数 m に対し、以下のように乗法的に拡張する。

$$\rho_{(a)}(m) = \prod_{p^b \parallel m} \rho_{(a)}(p^b)$$

ここで、 $p^b \parallel m$ は $p^b \mid m$ かつ $p^{b+1} \nmid m$ とする。 $\rho_{(a)}$ を a 階過剰指数と呼ぶ。定義より a 階過剰指数は数論的関数である。0階過剰指数 $\rho_{(0)}$ は過剰指数 ρ に等しい。

3. a階F-数と奇数超過剰数

超過剰数を調べるための出発点となるのは、L. Alaoglu - P. Erdős の次の定理である。

定理1 (Alaoglu-Erdős 1944 [1], Theorem 1)

n を超過剰数とする。 n の素因数分解を $n = 2^{k_2} 3^{k_3} 5^{k_5} \dots p^{k_p}$ (ただし、 $k_2, k_3, \dots, k_p$ は0以上の整数とする) と書くとき、 $k_2 \geq k_3 \geq k_5 \geq \dots \geq k_p \geq 0$ が成り立つ。

既知の事実であるかもしれないが、L. Alaoglu - P. Erdősの定理と同様の議論をすることで、奇数超過剰数について次の定理が成り立つ。

定理2

m を奇数超過剰数とする。 m の素因数分解を $m = 3^{k_3} 5^{k_5} \dots p^{k_p}$ (ただし、 $k_3, k_5, \dots, k_p$ は0以上の整数とする) と書くとき、 $k_3 \geq k_5 \geq \dots \geq k_p$ が成り立つ。

素数 p に対して、 p 以下のすべての素数の積を素数階乗といい、 $p\#$ で表す。超過剰数の素因数分解は、素因数が大きくなるに従い、べき指数が階段状に小さくなるので、素数階乗を使って次のように表せる。

$$n = p\# \times q\# \times r\# \times \dots (p, q, r, \dots \text{は } p \geq q \geq r \geq \dots \text{を満たす素数})$$

これを、 $n = [p, q, r, \dots]$ と表記する。

2を除く素数階乗を $p\#_{(\neq 2)}$ で表し、 p に関する奇素数階乗とよぶ。 $p\#_{(\neq 2)} = \frac{p\#}{2}$ である。奇数超過剰数の素因数分解は、素因数が大きくなるに従い、べき指数が階段状に小さくなるので、素数階乗を使って次のように表せる。

$$m = p\#_{(\neq 2)} \times q\#_{(\neq 2)} \times r\#_{(\neq 2)} \times \dots (p, q, r, \dots \text{は } p \geq q \geq r \geq \dots \text{を満たす奇素数})$$

これを、 $m = [p, q, r, \dots]_{odd}$ と表記する。

定義(a階F-数)

n を正の奇数とする。正の奇数 $k < n$ に対して $\rho_{(a)}(k) < \rho_{(a)}(n)$ を満たすとき、 n を a 階 F -数と呼ぶ。 a 階 F -数全体の集合を $F^{(a)}$ とし、 $F^{(a)}$ の要素を小さい順に並べたときの s 番目の要素を $F_s^{(a)}$ と書くことにする。

注意

0階過剰指数 $\rho_{(0)}$ は過剰指数 ρ に等しいので、0階 F -数は奇数超過剰数である。

主定理

任意の a 階 F -数は、ある奇素数 p に関する奇素数階乗 $p\#_{(\neq 2)}$ と $a + 1$ 階 F -数との積で表せる。特に、奇数超過剰数は、奇素数階乗と1階 F -数の積で表せる。

奇数超過剰数 $[71, 7, 3, 3]_{odd}$ (104番目、30桁)、 $[73, 11, 3, 3]_{odd}$ (114番目、33桁)、
 $[479, 23, 7, 5, 3, 3]_{odd}$ (866番目、210桁)は、次のように奇素数階乗と F -数の積で表せる。

$$[71, 7, 3, 3]_{odd} = [71]_{odd} \times [7, 3, 3]_{odd} = 71\#_{(\neq 2)} \times F_9^{(1)}$$

$$[73, 11, 3, 3]_{odd} = [73]_{odd} \times [11, 3, 3]_{odd} = 73\#_{(\neq 2)} \times F_{12}^{(1)}$$

$$[479, 23, 7, 5, 3, 3]_{odd} = [479]_{odd} \times [23, 7, 5, 3, 3]_{odd} = 479\#_{(\neq 2)} \times F_{42}^{(1)}$$

$$F_{42}^{(1)} = [23]_{odd} \times [7, 5, 3, 3]_{odd} = 23\#_{(\neq 2)} \times F_{12}^{(2)}$$

$$F_{13}^{(2)} = [7]_{\text{odd}} \times [5, 3, 3]_{\text{odd}} = 7\#_{(\neq 2)} \times F_6^{(3)}$$

上の例で見たように、奇数超過剰数を奇素数階乗と1階 F -数の積で表したとき、1階 F -数は奇数超過剰数に比べてかなり小さい。より上位の2階 F -数、3階 F -数、...は、さらに小さい数となる。非常に大きな奇数超過剰数においても、上位階の F -数はとても小さい。

主定理により、奇数超過剰数の奇素数階乗の積表示(定理2)を F -数による階層化と見ることができる。上位階の F -数から計算していくことで、奇数超過剰数を効率的に計算することができる。次章でその方法を紹介する。

主定理を証明する前に、いくつかの命題を示す。

命題3

n を正の奇数とする。

(1) $\rho_{(a)}(n) > 1$ が成り立つ。

(2) n と素な奇素数 p に対し、 $\rho_{(a)}(np) > \rho_{(a)}(n)$ が成り立つ。

(3) $\rho_{(a)}(n)$ は、 $a = 0$ のとき発散し、 $a \geq 1$ のとき上に有界である。

証明

(1) 命題1より、奇素数 p と非負の整数 b に対して以下が成り立つ。

$$\rho_{(a)}(p^b) = \varepsilon_{p^a}^{p^b} = \frac{p^{a+b+1}-1}{p^b(p^{a+1}-1)} = \frac{p^{a+1}-\frac{1}{p^b}}{p^{a+1}-1} > 1$$

よって、

$$\rho_{(a)}(n) = \prod_{p^b \parallel n} \rho_{(a)}(p^b) > 1$$

(2) (1)と $\rho_{(a)}$ の数論的乗法性より、 $\rho_{(a)}(np) = \rho_{(a)}(n) \times \rho_{(a)}(p) > \rho_{(a)}(n)$

(3) (1)より、奇素数 p と非負の整数 b に対して、 $\rho_{(a)}(p^b) > 1$ 。また、 $\frac{p^{a+1} - \frac{1}{p^b}}{p^{a+1} - 1} < \frac{1}{1 - p^{-(a+1)}}$ より、 $1 < \rho_{(a)}(p^b) < \frac{1}{1 - p^{-(a+1)}}$ 。よって、

$$\rho_{(a)}(n) = \prod_{p^b \parallel n} \rho_{(a)}(p^b) < \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-(a+1)}} \right) = \zeta(a+1)$$

ただし、 ζ はリーマンゼータ関数である。ゆえに、自然数 n に対して $\rho_{(a)}(n) < \zeta(a+1)$ を得る。 $\zeta(a+1)$ は $a=0$ のとき発散し、 $a=1, 2, 3, \dots$ のとき収束する。したがって、 $\rho_{(a)}(n)$ は、 $a=0$ のとき発散し、 $a \geq 1$ のとき上に有界である。

注意

特に n が奇数のとき、 $\rho_{(a)}(2^b) < \frac{1}{1 - 2^{-(a+1)}}$ なので、 $\rho_{(a)}(n) < \zeta(a+1)(1 - 2^{-(a+1)})$ である。

命題4

無数に多くの a 階 F -数が存在する。

証明

命題3より、 a 階 F -数 n と、 n と素な奇素数 p に対して、 $\rho_{(a)}(np) > \rho_{(a)}(n)$ が成り立つ。

素数は無限に存在するから、すべての a 階 F -数に対して、それより a 階過剰指数が大きい奇数が存在する。ゆえに、無数に多くの a 階 F -数が存在する。

命題5

p, q を奇素数で、 $p < q$ とする。このとき、任意の自然数 j, k に対して、 $\rho_{(a)}(p^j) > \rho_{(a)}(q^k)$ が成り立つ。

証明

$$\rho_{(a)}(p) = \frac{p^{a+2} - 1}{p(p^{a+1} - 1)} = 1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1} - 1)} \dots \textcircled{1}$$

$$\rho_{(a)}(p^k) = \frac{p^{a+k+1} - 1}{p^k(p^{a+1} - 1)} = 1 + \frac{p^k - 1}{p^k(p^{a+1} - 1)} < 1 + \frac{1}{(p^{a+1} - 1)} \dots \textcircled{2}$$

$$\rho_{(a)}(p^{k+1}) - \rho_{(a)}(p^k) = \left\{ 1 + \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}(p^{a+1}-1)} \right\} - \left\{ 1 + \frac{p^k-1}{p^k(p^{a+1}-1)} \right\} = \frac{p-1}{p^{k+1}(p^{a+1}-1)} > 0$$

ゆえに、 $\rho_{(a)}(p^k) < \rho_{(a)}(p^{k+1}) \dots \textcircled{3}$ 。①、②、③より、

$$1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)} \leq \rho_{(a)}(p^k) < 1 + \frac{1}{(p^{a+1}-1)}$$

よって、 p^j と q^k それぞれについて

$$1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)} \leq \rho_{(a)}(p^j) < 1 + \frac{1}{(p^{a+1}-1)}, \quad 1 + \frac{q-1}{q(q^{a+1}-1)} \leq \rho_{(a)}(q^k) < 1 + \frac{1}{(q^{a+1}-1)}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)} \right) - \left(1 + \frac{1}{(q^{a+1}-1)} \right) &= \frac{(p-1)(q^{a+1}-1) - p(p^{a+1}-1)}{p(p^{a+1}-1)(q^{a+1}-1)} = \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)(q^{a+1}-1)} \left\{ (q^{a+1} - 1) - \frac{p(p^{a+1}-1)}{p-1} \right\} \\ &= \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)(q^{a+1}-1)} \left\{ (q^{a+1} - 1) - p(p^a + p^{a-1} + \dots + p + 1) \right\} \\ &= \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)(q^{a+1}-1)} \left\{ q^{a+1} - (p^{a+1} + p^a + \dots + p + 1) \right\} \end{aligned}$$

p, q は奇素数より、 $q \geq p + 2$ なので、

$$\begin{aligned} q^{a+1} &\geq (p + 2)^{a+1} = p^{a+1} + 2(a + 1)p^a + 2(a + 1)ap^{a-1} + \dots + 2^{a+1} \\ &> p^{a+1} + p^a + \dots + p + 1 \end{aligned}$$

すなわち、 $\left(1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)} \right) - \left(1 + \frac{1}{(q^{a+1}-1)} \right) > 0$ 。よって、

$$1 + \frac{q-1}{q(q^{a+1}-1)} \leq \rho_{(a)}(q^k) < 1 + \frac{1}{(q^{a+1}-1)} < 1 + \frac{p-1}{p(p^{a+1}-1)} \leq \rho_{(a)}(p^j) < 1 + \frac{1}{(p^{a+1}-1)}$$

ゆえに、 $\rho_{(a)}(p^j) > \rho_{(a)}(q^k)$

命題6

a 階 F -数 A について、 q を A の素因数とする。このとき、 A は $q\#_{(\neq 2)}$ の倍数である。

証明

F -数 A が、 q より小さい奇素数 r を素因数に持たないと仮定する。 $A = q^n \times m$ (n は自然数、 m は q と素な自然数)と表す。命題5より、 $\rho_{(a)}(q^n) < \rho_{(a)}(r)$ 。よって $\frac{\rho_{(a)}(r)}{\rho_{(a)}(q^n)} > 1$ 。

$$\rho_{(a)}(A) < \rho_{(a)}(A) \frac{\rho_{(a)}(r)}{\rho_{(a)}(q^n)} = \rho_{(a)}(mr) \quad (\because A = m q^n > mr)$$

より、 A が F -数であることに反する。したがって、 F -数 A は q より小さいすべての奇素数を素因数に持つ。すなわち A は $q\#_{(\neq 2)}$ の倍数である。

主定理の証明

α を a 階 F -数とし、 α の最大素因数を p とする。命題6より、 α は $p\#_{(\neq 2)}$ で割り切れる。 $\alpha = p\#_{(\neq 2)}\beta$ とする。

以下、 β が $a + 1$ 階 F -数であることを示す。命題5より、無数に多くの $a + 1$ 階 F -数が存在するので、 β はある隣り合った $a + 1$ 階 F -数の間にある。 β を超えない最大の $a + 1$ 階 F -数を m とし、 β より大きい最小の $a + 1$ 階 F -数を n とおく。このとき、 m と n の間に $a + 1$ 階 F -数は存在しない。つまり、 $m < x < n$ を満たす奇数 x について、 $\rho_{(a+1)}(m) \geq \rho_{(a+1)}(x)$ が成り立つ。したがって、 β についても $\rho_{(a+1)}(m) \geq \rho_{(a+1)}(\beta)$ が成り立つ。ここで、 $\alpha' = p\#_{(\neq 2)}m$ とおくと、 $m \leq \beta$ だから $\alpha' \leq \alpha$ 。 $\rho_{(a+1)}(m) \geq \rho_{(a+1)}(\beta)$ だから、 $\rho_{(a)}(\alpha') \geq \rho_{(a)}(\alpha)$ となる。 α は a 階 F -数だから、 $\alpha' = \alpha$ でなければならない。よって、 $\beta = m$ 、つまり β は $a + 1$ 階 F -数である。

注意

命題3～6および主定理の証明において定理2は用いておらず、主定理の証明は定理2の証明を内包する形である。よってこれは定理1 (Alaoglu-Erdős 1944 [1], Theorem 1)の別証とも言える。

4. 奇数超過剰数の計算

F -数を使って奇数超過剰数を計算する。

自然数 a を適当に定め、 a 階 F -数を小さい順にいくつか計算する。

求めた a 階 F -数に奇素数階乗をかけた数を考える。奇素数階乗は、順にできるだけ大きい奇素数までのものを用意しておく。主定理により、 $a - 1$ 階 F -数はこれらの数に含まれる。

これらの数を小さい順にならべ、 $a - 1$ 階過剰指数を計算する。 $a - 1$ 階過剰指数がそれまでの数の $a - 1$ 階過剰指数より大きくなったとき、その数が $a - 1$ 階 F -数である。こうして a 階 F -数から $a - 1$ 階 F -数を作ることができる。

求めたすべての a 階 F -数にたくさんの奇素数階乗をかけた数について、その積と $a - 1$ 階過剰指数を計算する前に、2つの方法で不要な部分を取り除いておく。一つは、 a 階 F -数ごとに、その数の最大素因数よりも小さい奇素数に関する奇素数階乗を除くことで、これは機械的にできる。もう一つは、大きい奇素数に関する奇素数階乗を取り除くことだが、縦に a 階 F -数、横に奇素数階乗を並べた表を使って説明する。

		1	3#_(≠2)	5#_(≠2)	7#_(≠2)	11#_(≠2)	13#_(≠2)	17#_(≠2)	19#_(≠2)	23#_(≠2)
		1	3	15	105	1155	15015	255255	4849845	111546435
1	1	1	3	15	105	1155	15015	255255	4849845	111546435
2	3	3	9	45	315	3465	45045	765765	14549535	334639305
3	9	9	27	135	945	10395	135135	2297295	43648605	1003917915
4	27	27	81	405	2835	31185	405405	6891885	130945815	3011753745
5	45	45	135	675	4725	51975	675675	11486475	218243025	5019589575
6	135	135	405	2025	14175	155925	2027025	34459425	654729075	15058768725
7	405	405	1215	6075	42525	467775	6081075	103378275	1964187225	45176306175
8	675	675	2025	10125	70875	779625	10135125	172297125	3273645375	75293843625
9	945	945	2835	14175	99225	1091475	14189175	241215975	4583103525	105411381075
10	2835	2835	8505	42525	297675	3274425	42567525	723647925	13749310575	316234143225
11	4725	4725	14175	70875	496125	5457375	70945875	1206079875	22915517625	527056905375
12	14175	14175	42525	212625	1488375	16372125	212837625	3618239625	68746552875	1581170716125
13	42525	42525	127575	637875	4465125	49116375	638512875	10854718875	206239658625	4743512148375
14	99225	99225	297675	1488375	10418625	114604875	1489863375	25327677375	481225870125	11068195012875
15	127575	127575	382725	1913625	13395375	147349125	1915538625	32564156625	618718975875	14230536445125

これは、 $a = 2$ の場合の表で、縦に2階 F -数を15番目まで、横に23以下の奇素数に関する奇素数階乗を取り、それらの積の値の表である。1階 F -数を灰色で示している。

この表内において、命題3 (2)および F -数の定義から、右に進む、あるいは下に進めば数の大きさおよび1階過剰指数が大きくなる。

$$\rho_{(1)}\left(p_x \#_{(\neq 2)} \times F_y^{(2)}\right) = \rho_{(1)}\left(p_x \#_{(\neq 2)}\right) \times \rho_{(2)}\left(F_y^{(2)}\right)$$

$$\rho_{(a)}\left(p^n\right) = \frac{p^{n+a+1}-1}{p^n(p^{a+1}-1)} = \frac{p^{a+1}-\frac{1}{p^n}}{p^{a+1}-1} = 1 + \frac{1-\frac{1}{p^n}}{p^{a+1}-1}$$

より、 a の値が大きいほど n の変化にともなう $\rho_{(a)}\left(p^n\right)$ の増加量は小さいので、増加速度について

$$\left(\rho_{(1)}\left(p_x \#_{(\neq 2)}\right)\right) \text{の増加速度} > \left(\rho_{(2)}\left(F_y^{(2)}\right)\right) \text{の増加速度}$$

が成り立つ。また、一般に縦の列に比べて横の行の数の大きさの増加のほうが大きくなるので、基本的な $F^{(1)}$ の出現順番は1の列→3#_(≠2)の列→5#_(≠2)の列→7#_(≠2)の列→...が成り立つ。そこで、1, 27, 2025, 42525, 16372125,...のような各列の一番下の1階 F -数が決まれば、その右柄の列で1階 F -数の候補となる最も上段の候補が決まる。

a 階 F -数と奇素数階乗の表で、 $a - 1$ 階 F -数は左上から右下方向に現れる。 $a = 2$ の場合の上の表を少し大きくし(2階 F -数を51番目までにし、100以下の奇素数階乗にする)、1階 F -数の現れる右下部分を抜き出すと次のようになる。上の表と同じく1階 F -数を灰色で示す。

		41#_(#2)	43#_(#2)	47#_(#2)	53#_(#2)	59#_(#2)	61#_(#2)	67#_(#2)	71#_(#2)	73#_(#2)	79#_(#2)	83#_(#2)	89#_(#2)	97#_(#2)
		1521251317636	6541380665835	3074448912942	1629457923859	9613801750771	5864419067970	3929160775540	2789704150633	2036484029962	1608822383670	1335322578446	1188437094817	1152783981972
27	30405375	4.62542E+21	1.98893E+23	9.34798E+24	4.95443E+26	2.92311E+28	1.7831E+30	1.19468E+32	8.4822E+33	6.19201E+35	4.89168E+37	4.0601E+39	3.61349E+41	3.50508E+43
28	42567525	6.47559E+21	2.7845E+23	1.30872E+25	6.9362E+26	4.09236E+28	2.49634E+30	1.67255E+32	1.18751E+34	8.66881E+35	6.84836E+37	5.68414E+39	5.05888E+41	4.90712E+43
29	91216125	1.38763E+22	5.96679E+23	2.80439E+25	1.48633E+27	8.76934E+28	5.3493E+30	3.58403E+32	2.54466E+34	1.8576E+36	1.46751E+38	1.21803E+40	1.08405E+42	1.05152E+44
30	127702575	1.94268E+22	8.35351E+23	3.92615E+25	2.08086E+27	1.22771E+29	7.48901E+30	5.01764E+32	3.56252E+34	2.60064E+36	2.05451E+38	1.70524E+40	1.51766E+42	1.47213E+44
31	212837625	3.2378E+22	1.39225E+24	6.54358E+25	3.4681E+27	2.04618E+29	1.24817E+31	8.36273E+32	5.93754E+34	4.3344E+36	3.42418E+38	2.84207E+40	2.52944E+42	2.45356E+44
32	638512875	9.71339E+22	4.17676E+24	1.96308E+26	1.04043E+28	6.13854E+29	3.74451E+31	2.50882E+33	1.78126E+35	1.30032E+37	1.02725E+39	8.52621E+40	7.58832E+42	7.36067E+44
33	1915538625	2.91402E+23	1.25303E+25	5.88923E+26	3.12129E+28	1.84156E+30	1.12335E+32	7.52646E+33	5.34379E+35	3.90096E+37	3.08176E+39	2.55786E+41	2.2765E+43	2.2082E+45
34	3192564375	4.85669E+23	2.08838E+25	9.81538E+26	5.20215E+28	3.06927E+30	1.87225E+32	1.25441E+34	8.90631E+35	6.50161E+37	5.13627E+39	4.2631E+41	3.79416E+43	3.68034E+45
35	3618239625	5.50425E+23	2.36683E+25	1.11241E+27	5.89577E+28	3.4785E+30	2.12189E+32	1.42166E+34	1.00938E+36	7.36849E+37	5.8211E+39	4.83152E+41	4.30005E+43	4.17105E+45
36	10854718875	1.65128E+24	7.10048E+25	3.33723E+27	1.76873E+29	1.04355E+31	6.36566E+32	4.26499E+34	3.02815E+36	2.21055E+38	1.74633E+40	1.44946E+42	1.29002E+44	1.25131E+46
37	32564156625	4.95383E+24	2.13015E+26	1.00117E+28	5.30619E+29	3.13065E+31	1.9097E+33	1.2795E+35	9.08444E+36	6.63164E+38	5.23899E+40	4.34837E+42	3.87005E+44	3.75394E+46
38	54273594375	8.25638E+24	3.55024E+26	1.66861E+28	8.84365E+29	5.21776E+31	3.18283E+33	2.1325E+35	1.51407E+37	1.10527E+39	8.73166E+40	7.24728E+42	6.45008E+44	6.25657E+46
39	119401907625	1.8164E+25	7.81053E+26	3.67095E+28	1.9456E+30	1.14791E+32	7.00223E+33	4.69149E+35	3.33096E+37	2.4316E+39	1.92096E+41	1.5944E+43	1.41902E+45	1.37645E+47
40	162820783125	2.47691E+25	1.06507E+27	5.00584E+28	2.6531E+30	1.56533E+32	9.54849E+33	6.39749E+35	4.54222E+37	3.31582E+39	2.6195E+41	2.17418E+43	1.93502E+45	1.87697E+47
41	206239658625	3.13742E+25	1.34909E+27	6.34073E+28	3.36059E+30	1.98275E+32	1.20948E+34	8.10349E+35	5.75348E+37	4.20004E+39	3.31803E+41	2.75396E+43	2.45103E+45	2.3775E+47
42	618718975875	9.41227E+25	4.04728E+27	1.90222E+29	1.00818E+31	5.94824E+32	3.62843E+34	2.43105E+36	1.72604E+38	1.26001E+40	9.95409E+41	8.26189E+43	7.35309E+45	7.13249E+47
43	1031198293125	1.56871E+26	6.74546E+27	3.17037E+29	1.68029E+31	9.91374E+32	6.04738E+34	4.05174E+36	2.87674E+38	2.10002E+40	1.65901E+42	1.37698E+44	1.22551E+46	1.18875E+48
44	2268636244875	3.45117E+26	1.484E+28	6.97481E+29	3.69665E+31	2.18102E+33	1.33042E+35	8.91384E+36	6.32882E+38	4.62004E+40	3.64983E+42	3.02936E+44	2.69613E+46	2.61525E+48
45	3093594879375	4.70614E+26	2.02364E+28	9.5111E+29	5.04088E+31	2.97412E+33	1.81421E+35	1.21552E+37	8.63021E+38	6.30006E+40	4.97704E+42	4.13095E+44	3.67654E+46	3.56625E+48
46	6805908734625	1.03535E+27	4.452E+28	2.09244E+30	1.10899E+32	6.54307E+33	3.99127E+35	2.67415E+37	1.89865E+39	1.38601E+41	1.09495E+43	9.08808E+44	8.08839E+46	7.84574E+48
47	7218388051875	1.0981E+27	4.72182E+28	2.21926E+30	1.17621E+32	6.93962E+33	4.23317E+35	2.83622E+37	2.01372E+39	1.47001E+41	1.16131E+43	9.63888E+44	8.5786E+46	8.32124E+48
48	11343181224375	1.72558E+27	7.42001E+28	3.4874E+30	1.84832E+32	1.09051E+34	6.65212E+35	4.45692E+37	3.16441E+39	2.31002E+41	1.82492E+43	1.51468E+45	1.34807E+47	1.30762E+49
49	21655164155625	3.29429E+27	1.41655E+29	6.65777E+30	3.52862E+32	2.08188E+34	1.26995E+36	8.50866E+37	6.04115E+39	4.41004E+41	3.48393E+43	2.89166E+45	2.57358E+47	2.49637E+49
50	34029543673125	5.17675E+27	2.226E+29	1.04622E+31	5.54497E+32	3.27153E+34	1.99564E+36	1.33708E+38	9.49324E+39	6.93006E+41	5.47475E+43	4.54404E+45	4.0442E+47	3.92287E+49
51	64965492466875	9.88288E+27	4.24964E+29	1.99733E+31	1.05859E+33	6.24565E+34	3.80985E+36	2.5526E+38	1.81235E+40	1.32301E+42	1.04518E+44	8.67499E+45	7.72074E+47	7.48912E+49

$p_x \#_{(\neq 2)}, F_y^{(2)}$ の x, y の値が大きくなるほど、このように不規則な構造を取るようになる。

仮に $F^{(2)}$ を42番目までのみ計算したとき、下図で示した黄色の範囲

		41#_(#2)	43#_(#2)	47#_(#2)	53#_(#2)	59#_(#2)	61#_(#2)	67#_(#2)	71#_(#2)	73#_(#2)	79#_(#2)	83#_(#2)
		1521251317636	6541380665835	3074448912942	1629457923859	9613801750771	5864419067970	3929160775540	2789704150633	2036484029962	1608822383670	1335322578446
27	30405375	4.62542E+21	1.98893E+23	9.34798E+24	4.95443E+26	2.92311E+28	1.7831E+30	1.19468E+32	8.4822E+33	6.19201E+35	4.89168E+37	4.0601E+39
28	42567525	6.47559E+21	2.7845E+23	1.30872E+25	6.9362E+26	4.09236E+28	2.49634E+30	1.67255E+32	1.18751E+34	8.66881E+35	6.84836E+37	5.68414E+39
29	91216125	1.38763E+22	5.96679E+23	2.80439E+25	1.48633E+27	8.76934E+28	5.3493E+30	3.58403E+32	2.54466E+34	1.8576E+36	1.46751E+38	1.21803E+40
30	127702575	1.94268E+22	8.35351E+23	3.92615E+25	2.08086E+27	1.22771E+29	7.48901E+30	5.01764E+32	3.56252E+34	2.60064E+36	2.05451E+38	1.70524E+40
31	212837625	3.2378E+22	1.39225E+24	6.54358E+25	3.4681E+27	2.04618E+29	1.24817E+31	8.36273E+32	5.93754E+34	4.3344E+36	3.42418E+38	2.84207E+40
32	638512875	9.71339E+22	4.17676E+24	1.96308E+26	1.04043E+28	6.13854E+29	3.74451E+31	2.50882E+33	1.78126E+35	1.30032E+37	1.02725E+39	8.52621E+40
33	1915538625	2.91402E+23	1.25303E+25	5.88923E+26	3.12129E+28	1.84156E+30	1.12335E+32	7.52646E+33	5.34379E+35	3.90096E+37	3.08176E+39	2.55786E+41
34	3192564375	4.85669E+23	2.08838E+25	9.81538E+26	5.20215E+28	3.06927E+30	1.87225E+32	1.25441E+34	8.90631E+35	6.50161E+37	5.13627E+39	4.2631E+41
35	3618239625	5.50425E+23	2.36683E+25	1.11241E+27	5.89577E+28	3.4785E+30	2.12189E+32	1.42166E+34	1.00938E+36	7.36849E+37	5.8211E+39	4.83152E+41
36	10854718875	1.65128E+24	7.10048E+25	3.33723E+27	1.76873E+29	1.04355E+31	6.36566E+32	4.26499E+34	3.02815E+36	2.21055E+38	1.74633E+40	1.44946E+42
37	32564156625	4.95383E+24	2.13015E+26	1.00117E+28	5.30619E+29	3.13065E+31	1.9097E+33	1.2795E+35	9.08444E+36	6.63164E+38	5.23899E+40	4.34837E+42
38	54273594375	8.25638E+24	3.55024E+26	1.66861E+28	8.84365E+29	5.21776E+31	3.18283E+33	2.1325E+35	1.51407E+37	1.10527E+39	8.73166E+40	7.24728E+42
39	119401907625	1.8164E+25	7.81053E+26	3.67095E+28	1.9456E+30	1.14791E+32	7.00223E+33	4.69149E+35	3.33096E+37	2.4316E+39	1.92096E+41	1.5944E+43
40	162820783125	2.47691E+25	1.06507E+27	5.00584E+28	2.6531E+30	1.56533E+32	9.54849E+33	6.39749E+35	4.54222E+37	3.31582E+39	2.6195E+41	2.17418E+43
41	206239658625	3.13742E+25	1.34909E+27	6.34073E+28	3.36059E+30	1.98275E+32	1.20948E+34	8.10349E+35	5.75348E+37	4.20004E+39	3.31803E+41	2.75396E+43
42	618718975875	9.41227E+25	4.04728E+27	1.90222E+29	1.00818E+31	5.94824E+32	3.62843E+34	2.43105E+36	1.72604E+38	1.26001E+40	9.95409E+41	8.26189E+43
43	1031198293125	1.56871E+26	6.74546E+27	3.17037E+29	1.68029E+31	9.91374E+32	6.04738E+34	4.05174E+36	2.87674E+38	2.10002E+40	1.65901E+42	1.37698E+44
44	2268636244875	3.45117E+26	1.484E+28	6.97481E+29	3.69665E+31	2.18102E+33	1.33042E+35	8.91384E+36	6.32882E+38	4.62004E+40	3.64983E+42	3.02936E+44
45	3093594879375	4.70614E+26	2.02364E+28	9.5111E+29	5.04088E+31	2.97412E+33	1.81421E+35	1.21552E+37	8.63021E+38	6.30006E+40	4.97704E+42	4.13095E+44
46	6805908734625	1.03535E+27	4.452E+28	2.09244E+30	1.10899E+32	6.54307E+33	3.99127E+35	2.67415E+37	1.89865E+39	1.38601E+41	1.09495E+43	9.08808E+44
47	7218388051875	1.0981E+27	4.72182E+28	2.21926E+30	1.17621E+32	6.93962E+33	4.23317E+35	2.83622E+37	2.01372E+39	1.47001E+41	1.16131E+43	9.63888E+44
48	11343181224375	1.72558E+27	7.42001E+28	3.4874E+30	1.84832E+32	1.09051E+34	6.65212E+35	4.45692E+37	3.16441E+39	2.31002E+41	1.82492E+43	1.51468E+45
49	21655164155625	3.29429E+27	1.41655E+29	6.65777E+30	3.52862E+32	2.08188E+34	1.26995E+36	8.50866E+37	6.04115E+39	4.41004E+41	3.48393E+43	2.89166E+45
50	34029543673125	5.17675E+27	2.226E+29	1.04622E+31	5.54497E+32	3.27153E+34	1.99564E+36	1.33708E+38	9.49324E+39	6.93006E+41	5.47475E+43	4.54404E+45
51	64965492466875	9.88288E+27	4.24964E+29	1.99733E+31	1.05859E+33	6.24565E+34	3.80985E+36	2.5526E+38	1.81235E+40	1.32301E+42	1.04518E+44	8.67499E+45

は、 $F^{(1)}$ であることを決定づけられる根拠にかけている。なぜならば、列59#_(#2)の59#_(#2) $\times F^{(2)}$ ₄₂

(5.94824E+32)の下の数59#_(#2) $\times F^{(2)}$ ₄₃(9.9137E+32)が61#_(#2) $\times F^{(2)}$ ₃₇(1.9097E+33)や

$61\#_{(\neq 2)} \times F_{38}^{(2)}(3.18283E+33)$ の1階相対過剰指数 $\rho_{(1)}$ を上回っているかを判断することができないからだ。よって、黄色の範囲の数は $F^{(1)}$ の値から除外する。

一方で、 $53\#_{(\neq 2)}$ までの列においては、 $F_{32}^{(2)}$ 、 $F_{35}^{(2)}$ 、 $F_{36}^{(2)}$ 、 $F_{37}^{(2)}$ などで $F^{(1)}$ の出現は途切れており、また、 $59\#_{(\neq 2)} \times F_{43}^{(2)}(9.9137E+32)$ 未満の表内の数は、増加速度

$$(\rho_{(1)}(p_x \#_{(\neq 2)}) \text{の増加速度}) > (\rho_{(2)}(F_y^{(2)}) \text{の増加速度})$$

から $F^{(1)}$ に含まれる数であると保証される。このような方法で、 $F^{(1)}$ でない数を除外できる。

上の様にして、2階 F -数を使って1階 F -数を求めることができる。同様に、1階 F -数を使って0階 F -数、すなわち奇数超過剰数を求めることができる。原理的にはたくさんの2階 F -数を用意することで、多くの1階 F -数を求め、多くの奇数超過剰数が得られる。私たちはこの様に表を作り、試行錯誤を繰り返しながら、ひとつひとつ除外する領域を決めていき、4500番目までの奇数超過剰数を求めた。

5. 結果

私たちは、Google Colab (Python実行環境)を使って、25番目までの3階 F -数を定義に従って計算し、前章の方法を使って、2階 F -数、1階 F -数を計算し、そして4500番目までの奇数超過剰数(0階 F -数)を得た。そして、1851番目の数が初めて過剰指数が6を上回った。

最小の奇数6倍過剰数は、

$$m = [853, 41, 11, 7, 5, 3]_{\text{odd}} \\ = 3^7 \times 5^5 \times 7^4 \times 11^3 \times 13^2 \times 17^2 \times 19^2 \times 23^2 \times 29^2 \times 31^2 \times 37^2 \times 41^2 \times 43 \times 47 \times \dots \times 853$$

126876684979276124317098342825695520909683950704374884443815034567738416
426073929064906520948004957301705925979139280445076423310567279593300804
362213766586569488609510864166642926234064643384507173465682573066975898
862821316374268854446172958053807472568355669226551725795621770318848505
451816561995473029201886490718641609107733794518383512630927893743850113
813492756871875

(375桁)

である。

6. 最小の奇数7~9倍過剰数

著者の一人の永通悠伍は、第4章での判定手続きを見直し、不要な組み合わせをより多く除外することと、すべての手続きを計算機プログラムで実行することで、20685番目までの奇数超過剰数を求めた。そしてその中に、最小の奇数7倍過剰数と、最小の奇数8倍過剰数を見つけた。また、少しアルゴリズムを修正することで、最小の奇数9倍過剰数を見つけることができた。ただし、メモリなどの制約のため、それまでの奇数超過剰数のデータを保存することができなかった。

最小の奇数7倍過剰数

$$[2621, 71, 17, 7, 5, 3, 3, 3, 3]_{\text{odd}}$$

5646番目の奇数超過剰数であり、桁数は1142桁、過剰指数は約7.0001043である。

最小の奇数8倍過剰数

$$[8009, 127, 23, 13, 7, 5, 3, 3, 3]_{\text{odd}}$$

19083番目の奇数超過剰数であり、桁数は3489桁、過剰指数は約8.0000085である。

最小の奇数9倍過剰数

$$[24481, 223, 41, 17, 7, 5, 5, 3, 3, 3]_{\text{odd}}$$

56917番目の奇数超過剰数であり、桁数は10691桁、過剰指数は約9.0000042である。

本データについて、大阪大学理学研究科小川裕之助教に検証を依頼し、20685番目までの奇数超過剰数および奇数7~9倍過剰数がすべて正しいデータであることが確認できた。

参考文献

- [1] L. Alaoglu and P. Erdős, "On highly composite and similar numbers", Trans. of AMS, Vol.56, No.3, 448-469, Nov. 1944
- [2] R. Laatsch, "Measuring the Abundancy of Integers", Mathematics Magazine, Vol. 59, No. 2 (Apr., 1986), pp. 84-92
- [3] S. Pettigrew, "Sur la distribution de nombres spéciaux consécutifs," M.Sc. Thesis, Univ. Laval, 2000 (<https://www.collectionscanada.ca/obj/s4/f2/dsk2/ftp01/MQ55787.pdf>)
- [4] T. D. Noe, "Table of first 1000 oddly superabundant numbers" (<https://oeis.org/A119239/b119239.txt>)
- [5] A119239 : "Oddly superabundant numbers", The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS (<https://oeis.org/A119239>)
- [6] A119240 : "Least odd number k such that $\sigma(k)/k \geq n$ ", The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS (<https://oeis.org/A119240>)

謝辞

本研究を進めるにあたって、大阪大学理学研究科小川裕之助教に多くのご助言をいただきました。またデータ検証の依頼にも快く応じていただきました。ここに深く感謝申し上げます。